# Комбінаторика

1. Множина цілих чисел містить більше $3^k$ елементів. Доведіть, що в ній можна обрати ($k$+1)-елементну підмножину $S$ так, що суми в усіх підмножинах S будуть попарно різними.

2. В графі степені усіх вершин не менші за 3. Доведіть, що тоді в ньому існує цикл, довжина якого не ділиться на 3.

3. Розглянемо довільну множину з $n$ точок на площині, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Назвемо опуклий багатокутник з вершинами в деяких з цих точок *цікавим,* якщо в середині цього багатокутника немає інших точок з обраної множини. Нехай $a_k$- кількість *цікавих* багатокутників з $k$ вершинами. Доведіть, що значення суми $\sum_{i=3}^{n}(-1)^i a_i$ залежить лише від $n$ (тобто є однаковим для всіх наборів із $n$ точок загального положення).

4. На дошці записані числа $0{,}1{,}\sqrt{2}$. За один крок до будь-якого з цих чисел можна додати різницю двох інших, помножену на довільне раціональне число. Чи можна за допомогою таких операцій отримати числа 0,2, $\sqrt{2}$ ?

5. Задана множина $A$ з $N$ остач при діленні на $N^2$. Доведіть, що знайдеться множина $B$ з $N$ остач при діленні на $N^2$ така, що множина $A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$ містить не менше половини від усіх остач при діленні на $N^2$.

6. $2^n + 1$ різних множин розбиті на дві категорії – *жовті* та *сині,* причому в кожній категорії є хоча б одна множина. Доведіть, що кількість різних множин, кожну з яких можна подати у вигляді симетричної різниці *жовтої* та *синьої* множини, не менша за $2^n$.

7. По колу розташовано 1994 камінців, на яких сидять жаби. За один крок з одного з камінців, на якому сидять щонайменше 2 жаби, одна жаба стрибає на лівий сусідній камінь і одна стрибає на правий сусідній камінь. Спочатку всі жаби сидять на одному камені. Доведіть, що якщо їхня кількість рівна 1994, то завжди знайдеться камінь, на якому сидить щонайменше 2 жаби, а якщо їх менше, ніж 1994, то через деякий час на кожному камінці буде щонайбільше одна жаба.

8. Задано скінченний граф G. Розглянемо розфарбування його вершин в чорний і червоний кольори, для яких виконана умова: якщо із G видалити усі ребра, які з'єднують вершини різних кольорів, то степінь кожної вершини стане парним. Доведіть, що кількість таких розфарбувань рівна $2^k$ для деякого цілого $k$.

9.Дана клітчаста дошка $n \times n$. В центрах деяких її клітин сидять мурахи. В момент часу 0 кожна мураха починає рухатися зі швидкістю 1 параллельно одній із сторін дошки. Якщо в певний момент часу в клітині зустрічаються дві мурахи, що рухаються у протилежних нарямках, то кожна з них повертає на $90^0$ за годинниковою стрілкою, і вони продовжують рухатися зі швидкістю 1. Коли зустрічаються не менше ніж три мурахи або дві мурахи, що повзуть у перпендикулярних напрямах, напрямі і швидкість руху вони не змінюють. Якщо мураха дістається до краю дошки, то вона більше на дошку не повертається.

Розглянемо усі можливі початкові розташування мурах на дошці. Знайдіть найбільше можливе значення часу в момент, коли остання мураха виповзе за межі дошки, або доведіть, що цей момент може ніколи не настати.

10. В кожній одиничній клітині  клітчастого прямокутника $m \times n$ проведена одна з діагоналей. Доведіть, що знайдеться шлях, який проходить по проведених відрізках і сполучає деяку пару протилежних сторін прямокутника.

11. Квадрат  $ABCD$ розрізали  на однакові прямокутники з цілими довжинами сторін. Фігура $F$ – об'єднання усіх прямокутників розбиття, які мають спільні точки з діагоналлю $AC$. Доведіть, що $AC$ ділить площу фігури $F$ навпіл.

12. Деякі учасники математичного змагання товаришують один з одним, причому якщо $A$ товаришує з $B$, то й $B$ товаришує з $A$. Назвемо групу учасників клікою, якщо кожні двоє з неї товаришують. (Зокрема одна людина утворює кліку). Назвемо розміром кліки кількість людей у ній. Відомо, що найбільший розмір кліки, що складається з учасників змагання, є парним числом. Доведіть, що можливо розсадити усіх учасників у дві кімнати таким чином, щоб найбільші розміри клік у кімнатах були рівними.

13. Дано дерево $T$ з $n$ ребрами. Доведіть, що $n$ −вимірний куб можна покрити ізоморфними $T$ деревами так, щоб кожне ребро куба належало рівно одному дереву.