

Алгебра. Неравенства

Хилько Данил DKHILKO@UKR.NET

Задача 1. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq 3.$$

Задача 2. Доказать неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geq 14$, если $a + 2b + 3c \geq 14$.

Задача 3. Для действительных чисел a, b, c докажите неравенство $a\sqrt{a^2 + c^2} + b\sqrt{b^2 + c^2} \leq a^2 + b^2 + c^2$

Задача 4. Даны положительные числа $A, a_1, \dots, a_n, B, b_1, \dots, b_n$ такие, что $A^2 \geq a_1^2 + \dots + a_n^2$ и $B^2 \geq b_1^2 + \dots + b_n^2$. Докажите неравенство

$$(A^2 - (a_1^2 + \dots + a_n^2))(B^2 - (b_1^2 + \dots + b_n^2)) \leq (AB - (a_1b_1 + \dots + a_nb_n))^2.$$

Задача 5. (Неравенство трёх квадратов) Для действительных чисел a, b, c докажите неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Задача 6. (Неравенство Шура) Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство $abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$.

Задача 7. Найдите наименьшее возможное значение выражения $5x^4 + \frac{4}{x^5}$ при положительных x .

Задача 8. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^4}{a^3} \geq 2b + 2c - a.$$

Задача 9. Даны положительные числа a, b такие, что $ab > 2002a + 2003b$. Доказать, что $a + b > (\sqrt{2002} + \sqrt{2003})^2$.

Задача 10. (Неравенство Бернулли) Для натурального n и $x \geq -1$ докажите неравенство $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Задача 11. Для положительных чисел a, b, c таких, что $a + b + c = 1$ докажите неравенство

$$a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Задача 12. Для положительных чисел a, b, c таких, что $abc = 1$ докажите неравенство

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Задача 13. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{(a-b)^2}{(c+a)(c+b)} + \frac{(b-c)^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{(c-a)^2}{(b+c)(b+a)} \geq \frac{(a-b)^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Задача 14. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{a^2 + b^2}{c^2 + ab} + \frac{b^2 + c^2}{a^2 + bc} + \frac{c^2 + a^2}{b^2 + ca} \geq 3.$$