

Алгебра

1. Доведіть, що значення виразу $1000^2 + (1000 \cdot 1001)^2 + 1001^2$ є квадратом натурального числа.
2. Відомо, що $a = b + 1$. Спростіть вираз: $(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})(a^{32}+b^{32})$.
3. Доведіть, що $(1-2+2^2)(1-2^2+2^4)(1-2^4+2^8)(1-2^8+2^{16})(1-2^{16}+2^{32}) = \frac{1+2^{32}+2^{64}}{7}$.
4. Розкладіть на множники:
 - 1) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9$;
 - 2) $y^8 - y^4 + 4y^2 - 4$;
 - 3) $x^2 + 2x - y^2 + 4y - 3$;
 - 4) $x^4 y^2 + 2x^2 y - x^2 + 6x - 8$;
 - 5) $8x^2 - 12x + 2xy - y^2 + 4$.
5. Розкладіть на множники:
 - 1) $a^3 + 2a^2 - 3$;
 - 2) $b^3 + b^2 + 4$;
 - 3) $x^3 - 7x - 6$;
 - 4) $a^3 - 2ab^2 - b^3$;
 - 5) $m^5 + m^4 + 1$;
 - 6) $x^3 - 3x + 2$;
 - 7) $x^3 - 3x^2 + 2$;
 - 8) $x^3 + x^2 + 18$;
 - 9) $a^3 - 3ab^2 - 2b^3$;
 - 10) $x^8 + x^7 + 1$;
 - 11) $x^4 - 8x^2 + 4$;
 - 12) $4x^4 - 12x^2 + 1$;
 - 13) $a^4 + a^2 + 1$;
 - 14) $x^4 - 7x^2 + 9$;
 - 15) $9x^4 - 3x^2 + 1$;
 - 16) $a^4 + 64$.
6. Відомо, що $a^3 - b^3 = 4$ і $a^2 b - ab^2 = 1$. Знайдіть значення виразу $a - b$.
7. Розкладіть на множники: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.
8. Розкладіть на множники: $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$.
9. Розкладіть на множники $a^n - b^n$.
10. Розкладіть на множники $a^n + b^n$, де n – непарне натуральне число.
11. Відомо, що $\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_4}$. Доведіть, що $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_2 + x_3 + x_4}\right)^3 = \frac{x_1}{x_4}$.
12. Відомо, що $b^2 + \frac{a^2}{4} = 1$ і $ab = 3$. Знайдіть значення виразу $a + 2b$.
13. Якою цифрою закінчується значення виразу:
 - 1) 4^{100} ;
 - 2) $3^{n+2} 7^n$.

14. Відомо, що $a^3 + 7a - 9 = 0$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{2a^3 + 3a}{11a - 18}$;

2) $\frac{2a^4 + 14a^2 - 17a + 3}{2a + 6}$.

15. Скоротіть дріб $\frac{x^5 + x + 1}{x^2 + x + 1}$.

16. Відомо, що $a + b = 6$, $ab = 7$. Знайдіть значення виразу:

1) $a^3b^2 + a^2b^3$;

2) $(a - b)^2$;

3) $a^4 + b^4$.

17. Розкладіть на множники многочлен $a^8 + a^6 + a^4 + a^2 + 1$.