

Фінал, середня ліга, група А

1. У місті Похмурові проживає 2 000 000 мешканців, що мало розмовляють один з одним. Але серед кожних 2000 мешканців знайдуться троє попарно знайомих. Доведіть, що у місті є четверо попарно знайомих один з одним мешканців.
2. Дано гострокутний трикутник ABC . Знайдіть ГМТ, що є центрами прямокутників, всі вершини яких належать сторонам трикутника ABC .
3. Є два натуральних числа m і n , $n > m$. Доведіть, що n можна представити у вигляді суми двох натуральних чисел, одне з яких — дільник числа m , а інше не має з m жодного спільного дільника, крім 1.
4. Кожну грань кубика поділили на 4 рівних квадрати і розфарбували ці квадрати в 3 кольори таким чином, щоб квадрати, що мають одну спільну сторону, були розфарбовані у різні кольори. Доведіть, що в кожний колір пофарбовані по 8 квадратиків.
5. Колоду карток з числами від 1 до 78 дають глядачеві. Той її перемішує, відбирає 40 карток, віддає їх першому фокуснику, а інші залишає собі. Перший фокусник відбирає з отриманих карток дві і повертає їх глядачеві. Глядач додає до цих карток одну з своїх тридцяти восьми, і після перемішування віддає ці три картки другому фокуснику. Другий фокусник показує, яка з цих карток була обрана глядачем. Запропонуйте, як міг бути показаний цей фокус.
6. Доведіть, що для будь-яких x_1, x_2, \dots, x_n справджується нерівність:

$$x_1(1 - x_1) + (x_2 - x_1)(1 - x_2) + (x_3 - x_2)(1 - x_3) + \dots + (x_n - x_{n-1})(1 - x_n) < \frac{1}{2}.$$

7. Три кола S_1, S_2 та S_3 дотикаються один до одного зовнішнім чином: S_1 та S_2 — в точці A , S_2 та S_3 — в точці B , S_1 та S_3 — в точці C . Прямі BC та BA другий раз перетинають S_1 в точках M та N відповідно. Доведіть, що MN — діаметр кола S_1 .
8. Є набір натуральних чисел a_1, a_2, \dots, a_n серед яких можуть бути рівні. Позначимо через f_k кількість чисел цього набору, які не менші, ніж k . Доведіть, що $f_1 + f_2 + \dots = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.
9. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2y^2 + x^2y + xy^2 + xy + x + y + 3 = 0, \\ x^2y + xy + 1 = 0. \end{cases}$$

10. Чому дорівнює сума всіх чисел від 1 до 239, у котрих сума цифр парна?