

Фінал, молодша ліга, група А

1. У місті Похмурові проживає 2 000 000 мешканців, що мало розмовляють один з одним. Але серед кожних 2000 мешканців знайдуться троє попарно знайомих. Доведіть, що у місті є четверо попарно знайомих один з одним мешканців.

2. Колоду карток з числами від 1 до 78 дають глядачеві. Той її перемішує, відбирає 40 карток, віддає їх першому фокуснику, а інші залишає собі. Перший фокусник відбирає з отриманих карток дві і повертає їх глядачеві. Глядач додає до цих карток одну з своїх тридцяти восьми, і після перемішування віддає ці три картки другому фокуснику. Другий фокусник показує, яка з цих карток була обрана глядачем. Запропонуйте, як міг бути показаний цей фокус.

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 = 2y - 1, \\ x^4 + y^4 = 2. \end{cases}$$

4. Є два натуральних числа m і n , $n > m$. Доведіть, що n можна представити у вигляді суми двох натуральних чисел, одне з яких – дільник числа m , а інше не має з m жодного спільного дільника, крім 1.

5. У середині гострокутного трикутника ABC обрана точка P . Точки A_1, B_1, C_1 – основи перпендикулярів з точки P на сторони BC, CA, AB відповідно. Точки A_2, B_2, C_2 – ортоцентри трикутників $AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1$ відповідно. Доведіть, що прямі A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 перетинаються в одній точці.

6. Кожну грань кубика поділили на 4 рівних квадрати і розфарбували ці квадрати в 3 кольори таким чином, щоб квадрати, що мають одну спільну сторону, були розфарбовані у різні кольори. Доведіть, що в кожний колір пофарбовані по 8 квадратиків.

7. Діагоналі AC і BD чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O . Периметри трикутників ABC і ABD рівні. Рівні й периметри трикутників ACD і BCD . Доведіть, що периметри трикутників AOD і BOC рівні.

8. Яку найбільшу кількість різних натуральних чисел можна обрати так, щоб сума будь-яких трьох з них була простим числом?

9. Число 1047 при діленні на A дає остачу 23, а при діленні на $A + 1$ – остачу 7. Знайдіть A .

10. Чому дорівнює сума всіх чисел від 1 до 239, у котрих сума цифр парна?