VI-й Всеукраїнський турнір математичних боїв імені академіка Ляшка І.І.

Командна олімпіада. Старша ліга

Так разве это был настоящий завтрак? — возразил Пончик. — Этот завтрак был пробный, так сказать, черновой, тренировочный.

Н.Носов «Незнайка на Луне»

1. Для невід'ємних чисел a, b, c довести нерівність

$$\sqrt{2a^2+bc}+\sqrt{2b^2+ca}+\sqrt{2c^2+ab}\geqslant 3\sqrt{ab+bc+ca}.$$

2. На колі дано n точок $(n>1)$. Нехай інтервал — це дуга між будь-якими двома точками з даних n, $\mathcal{F}$ — множина таких інтервалів, що кожен інтервал із $\mathcal{F}$ є підмножиною щонайбільше ще одного інтервалу з $\mathcal{F}$. Назвемо інтервал максимальним, якщо він не є підмножиною жодного іншого інтервалу. Нехай m — кількість максимальних інтервалів $\mathcal{F}$ і a — кількість немаксимальних інтервалів. Довести, що $m+\frac{a}{2}\leqslant n$.

3. Довести, що не існує натуральних чисел x, y і z, які задовольняють рівняння

$$x^2y^4-x^4y^2+4x^2y^2z^2+x^2z^4-y^2z^4=0.$$

4. На прямокутній декартовій площині відмітили 51 точку з цілими координатами так, що довжини відстаней між будь-якими двома точками — різні цілі числа. Довести, що більш, ніж 49% відстаней — парні числа.

5. Нехай n — натуральне число і p — таке просте, що $1<p<n$. Довести, що число

$$(2p+1)n^3+6n(1^2+2^2+\dots+p^2)$$

можна подати у вигляді суми $2p+1$ різних повних кубів.

6. У гострокутному трикутнику ABC точка H — ортоцентр, точка M — середина сторони AC, точка C_1 — проекція точки C на сторону AB, H_1 — точка, симетрична H відносно прямої AB. Нехай P, Q і R — проекції точки C_1 на прямі AH_1, AC і BC відповідно, M_1 — така точка, що центр описаного кола трикутника PQR є серединою відрізка MM_1. Довести, шо точка M_1 належить відрізку BH_1.

7. Знайти усі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, що для всіх $x, y\in\mathbb{R}$ задовольняють рівняння

$$y^2f(x)+x^2f(y)+xy=xyf(x+y)+x^2+y^2.$$

8. У гострокутному трикутнику ABC, де $AC\neq BC$, точка O — центр описаного кола. Точки P і Q — такі, що чотирикутники $BOAP$ і $COPQ$ — паралелограми. Довести, що точка Q — ортоцентр трикутника ABC.