

Командна олімпіада, середня ліга

1. Вчитель видав Владу та Насті по квадратному тричлену, написав на дошці 4 числа і наказав кожному з них підставити ці чотири числа у свій квадратний тричлен. У Влада вийшли значення 1, 3, 5 і 7. А Настя встигла підставити лише перші три числа і отримала 17, 15 і 13. Коли Настя зібралася підставити четверте число виявилось, що вчитель вже витер числа з дошки. Яке в неї вийшло б значення, якщо б вона встигла підставити четверте число? (Відповідь повинна бути конкретним числом.)

2. Для натуральних чисел a і b виконується нерівність

$$a \cdot \text{НОД}(a, b) + b \cdot \text{НОК}(a, b) < 2,5ab.$$

Доведіть, що a ділиться на b .

3. Задані дійсні числа $a, b, c, d > 0$ та $e, f, g, h < 0$. Доведіть, що всі нерівності $ae + bc > 0$, $ef + cg > 0$, $fd + gh > 0$, $da + hb > 0$ не можуть виконуватися одночасно.

4. Червоні, сині та зелені діти встали у коло. Коли вчителька попросила підняти руку червоних дітей, поруч з якими стоїть зелена дитина, руку підняло 20 дітей. А коли вона попросила підняти руку синіх дітей, поруч з якими стоїть зелена дитина, руку підняло 25 дітей. Доведіть, що поруч з деякою дитиною, що піднімала руку, стоїть дві зелені дитини.

5. На вечірку прийшло $2n$ людей, у кожного з яких серед присутніх є хоча б n знайомих. Доведіть, що з них можна обрати четверо людей і розсадити їх за круглий стіл так, що при цьому кожен був би знайомий з обома своїми сусідами.

6. Натуральні числа a, b і c такі, що $\frac{ab}{a-b} = c$. Відомо також, що числа a, b і c не мають спільного для всіх натурального дільника, більшого за 1. Доведіть, що $a - b$ є точним квадратом.

7. У трикутнику ABC виконується рівність $BC = 2AC$. На стороні BC обрана така точка D , що $\angle CAD = \angle CBA$. Пряма AD перетинає бісектрису зовнішнього кута C в точці E . Доведіть, що $AE = AB$.

8. Два кола дотикаються в точці A внутрішнім чином. Через точку B внутрішнього кола, відмінну від A , проведена дотична до цього кола, яка перетинає зовнішнє коло у точках C та D . Доведіть, що AB – бісектриса кута CAD .