

Предел функции в точке. Непрерывность

1. Докажите, что у любой непрерывной функции $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ существует неподвижная точка (то есть такое x , что $f(x) = x$).

2. Существует ли непрерывная функция, которая каждое своё значение достигает ровно по 2 раза?

3. Придумайте пример функции $f : [0; +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что $f(a + n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, но $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ не существует.

4. Докажите, что уравнение

$$(1 - x) \cos x = \sin x$$

имеет решение на отрезке $[0; 1]$.

5. Пусть

$$\alpha_0 < \beta_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \dots < \alpha_n < \beta_n$$

— фиксированные числа. Доказать, что все корни многочлена

$$P(x) = (x + \alpha_0) \dots (x + \alpha_n) + 2(x + \beta_0) \dots (x + \beta_n)$$

действительны.

6. Найти все такие непрерывные в 0 функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и удовлетворяющие соотношению

$$f(x) + f\left(\frac{2}{3}x\right) = x.$$

7. Пусть $f : [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна. Докажите, что на отрезке $[0; 2]$ существуют числа x, y такие, что

$$y - x = 1, \quad f(y) - f(x) = \frac{1}{2}(f(2) - f(0))$$

.

8. Рассмотрите функцию Дирихле, которая равна 1 в рациональных точках и 0 в иррациональных, и на её основе придумайте пример функции, которая непрерывна во всех иррациональных точках и разрывна во всех рациональных.

9. Докажите, что инъективная монотонная функция — непрерывна.