VI-й Всеукраїнський турнір математичних боїв імені академіка Ляшка І.І.

Особиста усна олімпіада. Старша ліга. Вихід

Через годину ті з вас, хто залишаться живими,
будуть заздрити, хе-хе, мертвим.

м-ф «Острів скарбів», Джон Сільвер

1. Кола ω_1 і ω_2 перетинаються в точках A і B. Хорда BC кола ω_1 перетинає ω_2 в точці $E \neq B$, а хорда BD кола ω_2 перетинає ω_1 в точці $F \neq B$. Відомо, що $DF = CE$. Доведіть, що відстані від точки A до прямих BD і BC рівні.

2. Нехай
$$a_n = \sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Доведіть, що $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dots + \dfrac{1}{a_{20}}$ — ціле число.

3. Нехай $n > 1$ — деяке натуральне число і X — множина, що складається з $n + 1$ елемента. Нехай $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ — такі підмножини X, що об'єднання будь-яких n підмножин має принаймні n елементів. Доведіть, що серед цих $2n + 1$ підмножин знайдуться такі три, що будь-які дві з них матимуть спільний елемент.

4. Натуральні числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ задоволняють умову: для довільних $i \neq j$ число a_i ділиться на $a_j - a_i$. Доведіть, що при $i < j$ виконується нерівність:
$$ia_j \leq ja_i.$$

5. Всередині трикутника ABC задано точку P. Нехай AA_1, BB_1, CC_1 — три чевіани, що проходять через P. Точка M — середина сторони BC, відмінна від A_1, T — точка перетину AA_1 і B_1C_1. Відомо, що коло, описане навколо трикутника BTC дотикається до B_1C_1. Доведіть, що $\angle BTM = \angle A_1TC$.

VI-й Всеукраїнський турнір математичних боїв імені академіка Ляшка І.І.

Особиста усна олімпіада. Старша ліга. Вихід

Через годину ті з вас, хто залишаться живими,
будуть заздрити, хе-хе, мертвим.

м-ф «Острів скарбів», Джон Сільвер

1. Кола ω_1 і ω_2 перетинаються в точках A і B. Хорда BC кола ω_1 перетинає ω_2 в точці $E \neq B$, а хорда BD кола ω_2 перетинає ω_1 в точці $F \neq B$. Відомо, що $DF = CE$. Доведіть, що відстані від точки A до прямих BD і BC рівні.

2. Нехай
$$a_n = \sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Доведіть, що $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dots + \dfrac{1}{a_{20}}$ — ціле число.

3. Нехай $n > 1$ — деяке натуральне число і X — множина, що складається з $n + 1$ елемента. Нехай $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ — такі підмножини X, що об'єднання будь-яких n підмножин має принаймні n елементів. Доведіть, що серед цих $2n + 1$ підмножин знайдуться такі три, що будь-які дві з них матимуть спільний елемент.

4. Натуральні числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ задоволняють умову: для довільних $i \neq j$ число a_i ділиться на $a_j - a_i$. Доведіть, що при $i < j$ виконується нерівність:
$$ia_j \leq ja_i.$$

5. Всередині трикутника ABC задано точку P. Нехай AA_1, BB_1, CC_1 — три чевіани, що проходять через P. Точка M — середина сторони BC, відмінна від A_1, T — точка перетину AA_1 і B_1C_1. Відомо, що коло, описане навколо трикутника BTC дотикається до B_1C_1. Доведіть, що $\angle BTM = \angle A_1TC$.