Завдання другого туру Ш етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2013-2014 н.р.

7 клас

1. Довести, що число $2^{2014}+1$ ділиться на число $2^{1007}+2^{504}+1$.
2. На колі відмітили 30 точок: по 10 точок жовтого, синього і зеленого кольору. Доведіть, що можна провести 15 хорд з кінцями в цих точках так, щоб жодні дві хорди не мали спільних точок, а кінці хорд мали різний колір.
3. Марина по черзі зафарбовує по одній клітинці квадрата 6х6. Зафарбувавши чергову клітинку, вона записує в ній число, що дорівнює кількості зафарбованих з нею сусідніх по стороні клітинок. Зафарбувавши весь квадрат, Марина обчислила суму записаних чисел. Яку суму вона може отримати.
4. На бал прийшли 30 хлопчиків і 30 дівчаток. Після танців виявилося, що всі хлопці танцювали з однаковою кількістю дівчаток, дівчинка Валя танцювала рівно із 15 хлопчиками. Доведіть, що знайдуться дві дівчинки, які танцювали з однаковою кількістю хлопчиків.
5. Відрізки AD і CE - бісектриси трикутника ABC. Точки K,M - основи перпендикулярів, опущених із точки B на прямі AD і CE відповідно. Доведіть, що коли BK=BE, то трикутник ABC - рівнобедрений.

31 січня 2014

Завдання другого туру Ш етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2013-2014 н.р.

9 клас

1.На дошці записані числа 1, 2, .. , 2014. Хлопчик і дівчинка по черзі витирають по одному числу. Гра завершується, коли на дошці залишаються два числа. Якщо їх сума ділиться на три, то перемагає хлопчик, який робить перший хід, якщо ні, то дівчина. Хто виграє при правильній грі ?

2. На бал прийшли 30 хлопчиків і 30 дівчаток. Після танців виявилося, що всі хлопці танцювали з однаковою кількістю дівчаток, а дівчинка Валя танцювала рівно із 15 хлопчиками. Доведіть, що знайдуться дві дівчинки, які танцювали з однаковою кількістю хлопчиків.

3. На колі відмітили 30 точок: по 10 точок жовтого, синього і зеленого кольору. Доведіть, що можна провести 15 хорд з кінцями в цих точках так, щоб жодні дві хорди не мали спільних точок, а кінці хорд мали різний колір.

4. Додатні числа a, b, c, d, e задовольняють рівність

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de$$

Доведіть, що серед цих чисел знайдуться три таких, що не існує трикутника з такими довжинами сторін.

5. Дано гострокутний трикутник АВС. Точки A_1, B_1 симетричні його вершинам А, В відносно прямих АС і АВ відповідно. Кола, які аписані навколо трикутників ABB_1, ACC_1 другий раз перетинаються в точці Р. Доведіть, що пряма АР проходить через центр кола, яке описане навколо трикутника АВС.

Завдання другого туру Ш етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2013-2014 н.р.
10 клас

1. Марина по черзі зафарбовує по одній клітинці прямокутника 2013x2014. Зафарбувавши чергову клітинку, вона записує в ній число, що дрівнює кількості зафарбованих з нею сусідніх по стороні клітинок. Зафарбувавши весь квадрат, Марина обчислила суму записаних чисел. Яку суму вона може отримати.
2. На дошці записані числа 1, 2, .. , 2014. Хлопчик і дівчинка по черзі витирають по одному числу. Гра завершується, коли на дошці залишаються два числа. Якщо їх сума ділиться на три, то перемагає хлопчик, який робить перший хід, якщо ні, то дівчина. Хто виграє при правильній грі ?

3.. Дано гострокутний трикутник ABC. Точки B_1, C_1 симетричні його вершинам B, C відносно прямих AC і AB відповідно. Кола, які аписані навколо трикутників ABB_1, ACC_1 другий раз перетинаються в точці P. Доведіть, що пряма AP проходить через центр кола, яке описане навколо трикутника ABC.

4.На координатній площині накреслили чотири графіки функцій вигляду $y = x^2 + ax + b$. Відомо, що є рівно 4 точки перетину, причому в кожній перетинаються рівно два графіка. Доведіть, що сума найбільшої і найменшої із абцис точок перетину дорівнює сумі двох інших абцис.

5. Дано многочлен $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots a_{n-1}x + a_n$. Покладемо $m = \min\{a_0, a_0 + a_1, \ldots, a_0 + a_1 + \ldots a_n\}$. Доведіть, що при $x \geq 1$ виконується нерівність $P(x) \geq mx^n$.

31 січня 2014

Завдання другого туру Ш етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2013-2014 н.р.

11 клас

1.На дошці записані числа 1, 2, .. , 2014. Хлопчик і дівчинка по черзі витирають по одному числу. Гра завершується, коли на дошці залишаються два числа. Якщо їх сума ділиться на три, то перемагає хлопчик, який робить перший хід, якщо ні, то дівчина. Хто виграє при правильній грі ?

2.На координатній площині накреслили чотири графіки функцій вигляду $y = x^2 + ax + b$. Відомо, що є рівно 4 точки перетину, причому в кожній перетинаються рівно два графіка. Доведіть, що сума найбільшої і найменшої із абсцис точок перетину дорівнює сумі двох інших абсцис.

3.. Дано гострокутний трикутник ABC. Точки B_1, C_1 симетричні його вершинам B, C відносно прямих AC і AB відповідно. Кола, які аписані навколо трикутників ABB_1, ACC_1 другий раз перетинаються в точці P. Доведіть, що пряма AP проходить через центр кола, яке описане навколо трикутника ABC.

4. Дано многочлен $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... a_{n-1}x + a_n$. Покладемо $m = \min\{a_0, a_0 + a_1, ..., a_0 + a_1 + ... a_n\}$. Доведіть, що при $x \geq 1$ виконується нерівність $P(x) \geq mx^n$.

5. Числа a,b,c такі, рівняння $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ має три дійсних корені. Доведіть, що коли $-2 \leq a + b + c \leq 0$, то хоча б один з цих коренів належить відрізку $[0,2]$.

31 січня 2014