

Теорія Чисел

- Є кути m°, n° , де m, n - взаємно прості цілі числа. Чи можна побудувати кут величиною 1 градус?
- Доведіть, що $(a, b) = (a-b, b)$, де $(a, b) = \text{НСД}(a, b)$.
- !!! Доведіть, що $(2^n, 2^m) = 2^{(n,m)}$, де $(a, b) = \text{НСД}(a, b)$.
- Розв'яжіть рівняння в натуральних числах $7x - 11y = 1$.
- Числа m і n - взаємно прості. Доведіть, що рівняння $mx + ny = 1$ має розв'язки в цілих числах.
- Доведіть, що для будь-яких невід'ємних чисел m і n числа 2^{2^n} і 2^{2^m} є взаємно простими.
- Виведіть з попередньої задачі, що простих чисел нескінченно багато.
- Один пристрій робить сині відмітки на довгій стрічці через кожні m см, інший – червоні через кожні n см (n і m – взаємно прості). Правда, що якась синя відмітка виявиться на відстані не більше 1 см від якоїсь червоної.
- Дозволяється зсувати фішку вздовж числової прямої на ± 1 та на $\pm\sqrt{2}$. Доведіть, що з будь-якого початкового положення її можна пересунути до початку координат ближче ніж на 0.0001.
- «Крокодил» називається фігура, хід якої заключається в прижку на клітину, в яку можна потрапити зсувом на одну клітинку по вертикалі або горизонталі, а потім на N клітинок в перпендикулярному напрямку (при $N = 2$ «крокодил» - це шаховий кінь). При яких N «крокодил» може пройти з будь-якої клітини нескінченної дошки на будь-яку іншу?
- Словом називається послідовність букв, добутком uv двох слів u і v називається результат приписання слова v праворуч до слова u . Довести, що якщо $uv = vu$, то існує таке слово s і натуральні числа k і l такі, що $u = s^k$, $v = s^l$.
- Розв'язати рівняння в цілих додатніх числах: $x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{10}{7}$.