

Комплексні числа в геометрії–2

1. **Теорема Ньютона.** В описанному чотирикутнику центр кола лежить на прямій, що з'єднує середини діагоналей.
2. **Теорема Гауса.** Протилежні сторони чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точках E і F . Тоді середини відрізків AC , BD і EF лежать на одній прямій.
3. **Теорема Паскаля.** Точки перетину прямих, що містять протилежні сторони вписаного чотирикутника, лежать на одній прямій.
4. **Теорема Монжа.** У вписаному чотирикутнику прямі, що проходять через середини сторін і перпендикулярні протилежним сторонам, та прямі, що проходять через середини діагоналей і перпендикулярні іншій діагоналі, конкурентні. (Усі 6 прямих перетинаються в одній точці.)
5. В колі проведені три паралельні хорди AA_1 , BB_1 , CC_1 . Довести, що для довільної точки M кола прямі MA_1 , MB_1 , MC_1 утворюють рівні кути з прямими BC , CA , AB відповідно.
6. Довести, що в прямокутному трикутнику з нерівними катетами бісектриса прямого кута ділить навпіл кут між медіаною та висотою, проведеними теж з прямого кута.
7. На колі, описаному навколо трикутника ABC взята точка P . Нехай A_1 , B_1 , C_1 — точки, симетричні точці P відносно сторін BC , AC , AB відповідно. Доведіть, що точки A_1 , B_1 , C_1 та ортоцентр трикутника ABC колінеарні.
8. Вписане коло дотикається до сторін трикутника ABC в точках A_1 , B_1 , C_1 . Нехай точки I , O — центри вписаного та описаного кола трикутника ABC , точка H — ортоцентр трикутника $A_1B_1C_1$. Довести, що точки O , I , H колінеарні.
9. Довести, що кут між прямими Сімсона, що визначаються точками P_1 і P_2 на описаному навколо трикутника ABC колі, дорівнює вписаному куту, що спирається на дугу P_1P_2 .
10. Пряма, що з'єднує середини двох протилежних сторін чотирикутника, що не є трапецією, утворює рівні кути з двома іншими сторонами. Довести, що останні дві сторони рівні.
11. У трикутнику ABC точки H , I — ортоцентр та інцентр відповідно, точка D — перетин висоти CH з описаним колом, точка M — середина дуги AB (що не містить точку C) описаного кола. Довести, що $\angle CIH = 90^\circ$ тоді і тільки тоді, коли $\angle IDM = 90^\circ$.