

Серія 6

1. Знайти x, y , що задовольняють рівності: $\frac{x^2 + y^2}{xy} + \frac{4xy}{x^2 + y^2} = 4$.

2. Довести, що якщо $\frac{x^2 - yz}{x(1 - yz)} = \frac{y^2 - xz}{y(1 - xz)}$, де $x \neq y$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, то

$$x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

3. Довести, що вираз $3a^2 - 5ab + 3b^2$ додатний, якщо a і b одночасно не рівні 0.

4. Доведіть рівність $(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n$.

5. Скількома способами можна розставити 8 тур на шахматній дошці так, щоб вони не били одна одну.

6. Найдіть суму 7-значних чисел, які можна отримати усіма можливими перестановками цифр 1, 2, ..., 7.

7. На площині дано n прямих загального положення (ніякі три не перетинаються в одній точці і ніякі дві не паралельні). Знайдіть кількість перетенів прямих. Скільки трикутників утворюють ці прямі.

8. Міжнародна комісія складається з 9 осіб. Матеріали комісії зберігаються в сейфі. Скільки замків повинен мати сейф і скільки ключів для нього потрібно зробити і як їх розділити між членами комісії, так, щоб доступ до сейфу мали не менше 6 осіб комісії?

Розгляньте задачу, коли комісія складається з n людей, а сейф можна відкрити лише при наявності m членів комісії ($m < n$).

9. Знайдіть суму :

а) $C_4^0 + 2C_4^1 + 2^2 C_4^2 + 2^3 C_4^3 + 2^4 C_4^4$;

б) $C_6^0 + 2^1 C_6^1 + 2^2 C_6^2 + \dots + 2^6 C_6^6$;

в) $C_5^0 + 3C_5^1 + 3^2 C_5^2 + \dots + 3^5 C_5^5$;

г) $C_{13}^0 + 13C_{13}^1 + 13^2 C_{13}^2 + \dots + 13^{13} C_{13}^{13}$.

10. Доведіть тотожність: $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$ (пригадайте комбінаторне доведення і доведіть алгебраїчно)

P. S. Якщо довго (протягом години двох у вас не буде ніяких ідей можете написати мені за підказкою по цій задачі).

11. Знайти суму: $C_m^0 - C_m^1 + \dots + (-1)^m C_m^m$.

12. Заданий рівнобедрений трикутник ABC з вершиною у точці B . На основі AC вибрана довільна точка D , відмінна від вершин A та C . На прямій AC вибираємо таку точку E поза відрізком AC , для якої $AE = CD$. Доведіть, що периметр $\triangle BDE$ більший за периметр $\triangle ABC$. (спробуйте побудувати щось та пошукати нерівності трикутників або навпаки подумати яка нерівність трикутника вам потрібно і щось побудувати для цього)

13. Дано прямокутний трикутник ABC ($\angle A < 45^\circ$, $\angle C = 90^\circ$), на сторонах AC і AB якого обрано такі точки D і E відповідно, що $BD = AD$ і $CB = CE$. Нехай відрізки BD і CE перетинаються в точці O . Доведіть, що $\angle DOE = 90^\circ$.