

Учіться...

Продовжіть послідовність:
9, 1, 16, 1, 25, 81, 4, ...

1. Доведіть нерівність

$$(1 - a)(1 - b)(1 - c)(1 - d) + a + b + c + d \geq 1,$$

якщо $0 \leq a, b, c, d \leq 1$

2. Доведіть нерівність

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq a^2b + b^2c + c^2a + 1,$$

якщо $0 \leq a, b, c \leq 1$.

3. Доведіть нерівність

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n - (x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_nx_1) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

якщо $0 \leq x_i \leq 1$, $n \geq 2$.

4. Знайдіть $\max \sum_{i < j} |x_i - x_j|$, якщо $0 \leq x_i \leq 1$.

5. Доведіть складну нерівність

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \cos \frac{\pi}{n+1} \geq x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n, \quad (n \geq 2).$$

6. (Для Наталки!) Обчислити

$$\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2012^2} + \frac{1}{2013^2}}.$$

7. (Для Вадіка!) AM та AN — медіана та бісектриса трикутника ABC . Через точки N провели пряму, перпендикулярну до AN , яка перетнула пряму AB в точці P і пряму AM в точці Q . Через точку P провели пряму, перпендикулярну до AB , яка перетнула пряму AN в точці O . Доведіть, що $QO \perp BC$.

8. (Для Каті!) Катя пам'ятає.