

# Les accordéons

Літній математичний табір "Контора  $\pi$ "  
Старша група

**Задача 1.** Дотична в точці  $A$  до описаного кола трикутника  $ABC$  перетинає пряму  $BC$  в точці  $M$ . Точка  $C'$  — симетричне відображення точки  $C$  відносно прямої  $AM$ , точка  $Y$  така, що  $M$  є серединою відрізка  $AU$ . Доведіть, що чотирикутник  $YC'AB$  вписаний.

**Задача 2.** Коло з центром  $O$ , що проходить через вершини  $B$  і  $C$  гострокутного трикутника  $ABC$ , перетинає сторони  $AB$  і  $AC$  в точках  $C_1$  і  $B_1$ . Описане коло  $ABC$  вдруге перетинає описане коло трикутника  $B_1C_1A$  в точці  $K$ . Доведіть, що  $\angle AKO = 90^\circ$ .

**Задача 3.** Дано гострокутний трикутник  $ABC$ . Коло

**Задача 4.** (Дуже важливий сюжет!) Дано трикутник  $ABC$ . Його вписане коло дотикається сторін  $AB$ ,  $BC$  в точках  $C_0$ ,  $A_0$ . Доведіть, що пряма  $A_0C_0$ , бісектриса кута  $A$  і середня лінія трикутника, яка є паралельною до  $AB$ , перетинаються в одній точці.

**Задача 5.** Всередині трикутника  $ABC$  обрано точку  $P$ . Прямі  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$  перетинають описане коло трикутника  $ABC$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$  і  $C_1$  відповідно. Точки  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  — симетричні відображення  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  відносно середин  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  відповідно. Доведіть, що ортоцентр  $ABC$  лежить на описаному колі трикутника  $A_2B_2C_2$ .

## 1 Додаткові побудови

**Задача 6.** Дано рівнобедрений трикутник  $ABC$  ( $AB = BC$ ). На сторонах  $AB$  і  $BC$  обрано точки  $D$  і  $E$  так, що  $BD = CE$  і  $\angle ADE + \angle DEB = 60^\circ$ . Доведіть, що  $DE = AC$ .

**Задача 7.** Всередині паралелограма  $ABCD$  обрано точку  $P$  так, що  $\angle APB + \angle CPD = 180^\circ$ . Доведіть, що  $\angle PAD = \angle PCD$ .

**Задача 8.** Дано прямокутний трикутник  $ABC$  з гіпотенузою  $AC$  і кутом  $\angle A = 50^\circ$ . Точки  $K$  і  $L$  на катеті  $BC$  такі, що  $\angle KAC = \angle LAB = 10^\circ$ . Доведіть, що  $CK = 2BL$ .

**Задача 9.** Дано гострокутний трикутник  $ABC$ . Нехай  $M$  — середина сторони  $AB$ , а  $T$  — середина меншої дуги  $BC$  описаного кола  $ABC$ . Точка  $K$  всередині трикутника  $ABC$  така, що  $МАТК$  є рівнобічною трапецією, причому  $AT \parallel МК$ . Доведіть, що  $AK = KC$ .

**Задача 10.** Два кола перетинаються в точках  $C$  і  $D$ . Пряма, що проходить через  $C$ , перетинає перше коло в точці  $A$ , а друге коло — в точці  $B$ . Бісектриса кута  $\angle ACD$  перетинає перше коло вдруге в  $X$ , а бісектриса кута  $\angle DCB$  перетинає друге коло вдруге в  $Y$ . Нехай  $M$  — середина  $AB$ . Доведіть, що  $\angle XMY = 90^\circ$ .

**Задача 11.** З точки  $A$  проведено дві дотичні  $AB$  і  $AC$  до кола  $\omega$ . На продовженні відрізка  $AB$  за точку  $B$  взято точку  $M$ . Описане коло трикутника  $ACM$  вдруге перетинає  $\omega$  в  $N$ . Нехай  $H$  — проекція точки  $B$  на  $CM$ . Доведіть, що  $\angle HNM = 2\angle AMC$ .

## 2 Все разом

**Задача 12.** Нехай  $АН$  — висота гострокутного трикутника  $ABC$ ,  $K$  і  $L$  — проєкції  $H$  на сторони  $AB$  і  $AC$ . Описане коло трикутника  $ABC$  перетинає пряму  $KL$  в двох точках  $P$  і  $Q$ , а пряму  $АН$  — в  $A$  і  $T$ . Доведіть, що  $H$  — інцентр трикутника  $PTQ$ .

**Задача 13.** (IMO SL 2016, G4) Дано трикутник  $ABC$  з  $AB = AC \neq BC$ . Нехай  $I$  — ортоцентр  $ABC$ . Пряма  $BI$  перетинає  $AC$  в точці  $D$ , а перпендикуляр до  $AC$  в точці  $D$  перетинає  $AI$  в  $E$ . Доведіть, що точка, симетрична  $I$  відносно  $AC$ , лежить на описаному колі трикутника  $BDE$ .

Хілько Данило  
dkhilko@ukr.net